

Actions, automates et systèmes dynamiques

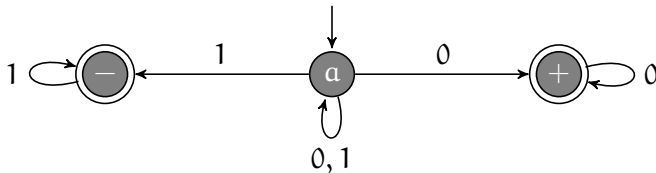
Séminaire virtuel francophone

2 juillet 2020

Définition (Langage ω -régulier)

ω -langage L = sous-ensemble de A^ω pour un alphabet A .
 L **ω -régulier** s'il existe un graphe fini, avec étiquettes $\in A$ sur arêtes ; ensemble I de sommets **initiaux** ; et F de sommets **résiduels**, tel que

$$L = \left\{ \begin{array}{l} \text{étiquettes sur chemins commençant en } I, \\ \text{visitant } F \text{ une infinité de fois} \end{array} \right\}.$$



- $L \text{ fermé} \subseteq A^\omega \Leftrightarrow$ on peut supposer $F = V$
- $A = A_0 \sqcup \{\sqcup\}$, $L \subseteq A_0^*$ régulier $\Leftrightarrow \{u_\sqcup^\omega : u \in L\}$ ω -régulier
- $L \subseteq A^*$ régulier $\Rightarrow \bar{L} \subseteq A^\omega$ ω -régulier
- fermeture pour $\cup, \cap, \neg$, morphismes
- décidable si $L = \emptyset$ (et donc si $L = A^\omega$, $L = M$, $L \subset M$, ...)

Définition (Relations, actions automatiques)

$R \subset L \times L$ *relation automatique*, pour $L \subset A^\omega$, si

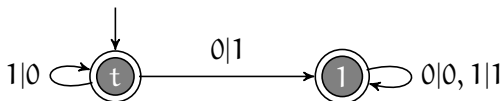
$$R \subset (A \times A)^\omega \text{ est } \omega\text{-régulier.}$$

En particulier : $G \curvearrowright L$ *action automatique* si

$\forall g \in G : \text{son graphe } \{(u, g(u)) : u \in L\} \text{ est } \omega\text{-régulier.}$

Exemples 1 : $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{Z}_2$ par translation

On encode $\mathbb{Z}_2$ par ses chiffres, $L = \{0, 1\}^\omega$; et $\mathbb{Z} = \langle t \rangle$. Graphe de t :



μ -Lemme

$G \curvearrowright L$ action automatique si et seulement si ses générateurs ont chacun un graphe ω -régulier.

Exemples 2 : groupes linéaires

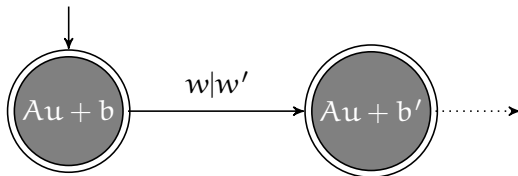
Soit G un groupe linéaire sur $\mathbb{Z}$. En particulier, $G \subset M_d(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^d$, le groupe affine, agissant sur $\mathbb{Z}^d$.

$\mathbb{Z}$ est ω -régulier $\subset \mathbb{Z}_p$. On étend l'action à $\mathbb{Z}_p^d$, qu'on encode par A^ω , avec $A = \{0, \dots, p-1\}^d$.

Si $g(u) = Au + b$, on écrit $u = pv + w$ avec $w \in A$, puis

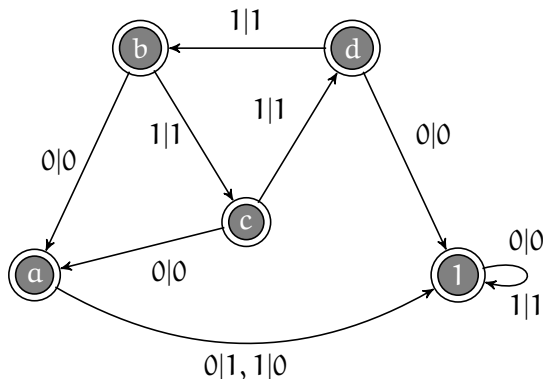
$Aw + b = pb' + w'$ avec $w' \in A$; donc $\|b'\| = \frac{\|b\|}{p} + \mathcal{O}(1)$ et

$$g(u) = A(pv + w) + b = p(Av + b') + w'$$



Exemples 3. Groupes auto-similaires

G engendré par tous les choix d'état initial dans un automate ;
e.g. Grigroupe, de torsion, croissance des mots intermédiaire :

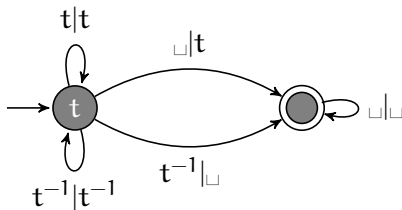
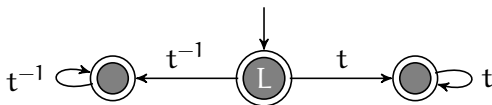


Actions **profinies** : ont comme quotient les actions sur A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemples | 4. Groupes automatiques

Groupe $G = \langle S \rangle$, avec forme normale $L \subseteq S^*$, langage régulier, en bijection avec G via $e: S^* \twoheadrightarrow G$; avec $\forall s \in S$ un automate reconnaissant $(e^{-1}(g), e^{-1}(gs))$. Exemple : $\pi_1(M^3)$ sans pièce Nil, Sol.

Plus simple : on étend L en $\{u_\sqcup^\omega : u \in L\}$.



Plus généralement : on encode $G \subseteq A^*$, et demande que les opérations de G soient données par des automates.

Actions **libres**.

Conjecture

$\pi_1(M^3)$ *est Cayley-automatique*.

$\zeta: X \rightarrow X^*$ substitution, p.ex. $X = \{a, b\}$, $\zeta(a) = ab$, $\zeta(b) = a$.

$\Omega = \{u \in X^{\mathbb{Z}} : \text{tout s/mot de } u \text{ est s/mot d'un } \zeta^n(x) \text{ avec } x \in X, n \in \mathbb{N}\}$.

Un $\mathbb{Z}$ -système dynamique, i.e. une action de $\mathbb{Z}$ sur Ω , engendrée par σ .

Bonne substitution : si ζ s'étend à $\zeta: \Omega \hookrightarrow \Omega$, et

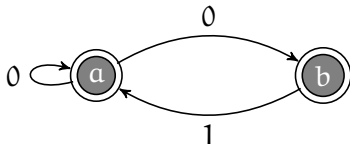
$$\left[\bigsqcup_{x \in X} \Omega_x = \right] \Omega = \bigsqcup_{x \in X} \bigsqcup_{0 \leq i < |\zeta(x)|} \sigma^i \zeta(\Omega_x), \quad \Omega_x = \{u \in \Omega : u_0 = x\}.$$

$\rightsquigarrow$ codage $c: \Omega \hookrightarrow L \subset A^{\omega}$, avec $A = \{(x, i) : 0 \leq i < |\zeta(x)|\}$:

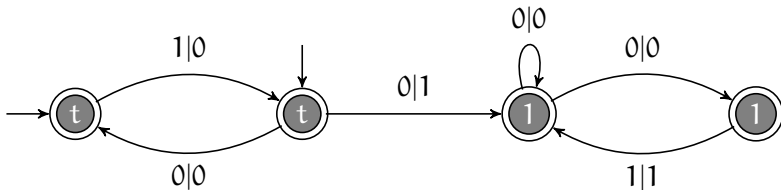
$$c(u) = (x, i)c(u'), \quad u = \sigma^i \zeta(u') \in \sigma^i \zeta(\Omega_x).$$

Exemples | 6. Système dynamique Fibonacci

$$\zeta(a) = ab, \zeta(b) = a.$$



Action de $\mathbb{Z} = \langle t \rangle$ donnée par

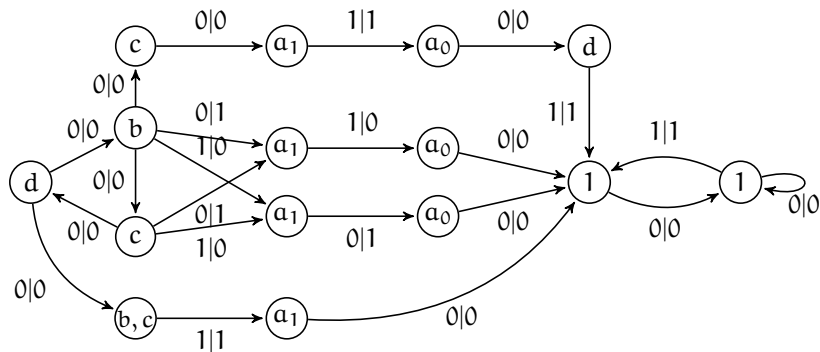


Exemples 7. Fragmentations

On part de $G = \langle a, b, \dots \rangle$, avec $a^2 = 1$, action automatique sur L ;

on remplace a par $A \cong (\mathbb{Z}/2)^d$, avec $Au = \langle a \rangle u \forall u \in L$.

Quques hypothèses ($\exists u \in L : a(u) = u, \forall h \in A : u \in \overline{\text{Fix}(h)} \setminus \{u\}$)
 $\Rightarrow \langle A, b, c, \dots \rangle$ simple, torsion, croissance subexponentielle, ...



$G = \langle a_0, a_0, b, c, d \rangle \leadsto \text{Fibonacci.}$

$G = \langle S \rangle \curvearrowright L$, donné par automates pour S .

Problème du mot : étant donné $w \in S^*$, a-t-on $e(w) = 1 \in G$? —
résoluble en temps au plus exponentiel en $|w|$.

Question : borne, si action fidèle ? (polynomiale)

Problème de conjugaison : étant donné $u, v \in S^*$, a-t-on
 $\exists w \in G : e(u)^w = e(v) \in G$? — non résoluble en général.

Équations quadratiques

Logique du premier ordre

Définition

$G \curvearrowright L$ **contractante** s'il existe un graphe fini contenant $\forall g \in G$ l'attracteur de g .

$G \curvearrowright L$ **bornée** si $\forall g \in G : \exists$ un nombre de chemins infinis dans l'automate de g , n'atterrissant pas en un état identité.

μ -Lemme

borné $\Rightarrow$ contractant.

μ -Lemme

contractant $\Rightarrow$ problème du mot résoluble en temps polynomial.

Conjecture

borné $\Rightarrow$ logique du premier ordre résoluble.

Plusieurs cas particuliers. Problème de conjugaison $\Rightarrow$ décidabilité de l'isomorphisme de décalages substitutifs.

Relation orbitale : $R = \{(u, v) \in L \times L : Gu = Gv\}$. Automatique ?
Calculable ?

μ -Théorème

$\{(u, v) : \overline{Gu} = \overline{Gv}\}$ *automatique, calculable*.

Proximalité : $P = \{(u, v) : \exists (g_n) : (g_n u, g_n v) \rightarrow \Delta \subset L \times L\}$.
Calculable ? Ou au moins décider si $P = \Delta$ (action **distale**)

Proximalité locale :

$R = \{(u, v) : \exists (u_n) \rightarrow u, (v_n) \rightarrow v, (g_n) : (g_n u_n, g_n v_n) \rightarrow \Delta\}$.

Calculable ? Ou au moins décider $R = \Delta$ (action **équicontinue**)

$L/\langle \overline{P} \rangle, L/\langle \overline{R} \rangle$ est le quotient maximal distal / équicontinu.