

# Exposants critiques, revêtements, moyennabilité

## Séminaire francophone de groupes et géométrie

Quelque part, juin 2020

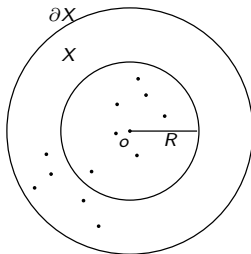
Travail en commun avec  
Rémi Coulon, Rhiannon Dougall and Samuel Tapie

# Exposants critiques

Un groupe discret  $\Gamma$  agit sur un / l'espace hyperbolique  $X$  (par ex.  $X = \mathbb{H}^n$ ).

L'exposant critique de cette action est

$$\delta_\Gamma = \limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \log \# \{ \gamma \in \Gamma, d(o, \gamma o) \leq R \}.$$



# Exposants critiques

Il coincide avec

→ la **dimension** de l'ensemble limite (radial)  $\Lambda_{rad}(\Gamma)$  dans  $\partial X$

→ l'**entropie** du flot géodésique sur  $T^1(X/\Gamma)$

Bien sûr, si  $\Gamma' < \Gamma$ ,  $\delta_{\Gamma'} \leq \delta_{\Gamma}$ .

**Question :** Quand a-t-on égalité  $\delta_{\Gamma'} = \delta_{\Gamma}$  ?

# Notre résultat

**Théorème :** (Coulon-Dougall-Sch.-Tapie 2019) Soit  $\Gamma$  un groupe discret agissant sur un espace hyperbolique  $X$ , avec un *saut d'entropie à l'infini*  $\delta_\Gamma^\infty < \delta_\Gamma$ . Soit  $\Gamma' < \Gamma$  un sous-groupe. Alors

$$\delta_{\Gamma'} = \delta_\Gamma \quad \text{ssi} \quad \Gamma/\Gamma' \quad \text{moyennable}.$$

Résultat déjà connu dans différents cas :

- Brooks (81,85) : actions convexe-cocompactes sur  $\mathbb{H}^n$ , avec  $\delta_\Gamma > n/2$
- Grigorchuk, Cohen (80, 82) : action d'un groupe libre sur son graphe de Cayley
- Stadlbauer: actions convexe-cocompactes (géom. finies) sur  $\mathbb{H}^n$
- Dougall-Sharp : actions convexe-cocompactes, courbure nég. variable
- Coulon-Dal'bo-Sambusetti : actions cocompactes,  $CAT(-1)$
- Roblin (03) : moyennabilité implique égalité quand  $\Gamma' \triangleleft \Gamma$

# Moyennabilité

Le groupe  $\Gamma'$  est co-moyennable dans  $\Gamma$  si la représentation régulière

$$\rho : \Gamma \rightarrow \mathcal{U}(\ell^2(\Gamma/\Gamma'))$$

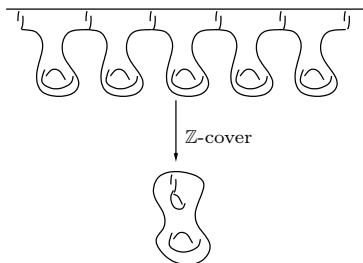
défini par  $\rho(\gamma)(\varphi)(\cdot) = \varphi(\gamma \cdot)$  admet presque des vecteurs invariants :

pour tout  $\varepsilon > 0$  et  $S \subset \Gamma$  fini, il existe  $\varphi \in \ell^2(\Gamma/\Gamma')$  tel que pour  $\gamma \in S$ ,  $\|\rho(\gamma)\varphi - \varphi\| < \varepsilon\|\varphi\|$ .

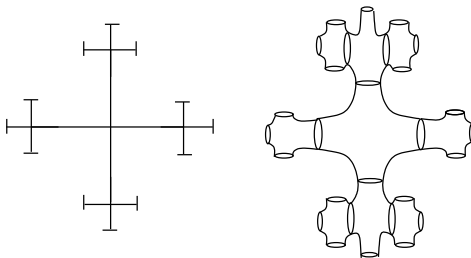
Groupe moyennable typique :  $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^d$

Groupe non moyennable typique :  $\mathbb{F}^n$

# Revêtements (Non)-moyennables



Un  $\mathbb{F}_2$ -revêtement d'une surface hyperbolique compacte.



# Entropie à l'infini

Le groupe  $\Gamma$  agit sur  $X$  (par ex.  $X = \mathbb{H}^n$ ). Soit  $K \subset X$  un compact,  $o \in K$ . On définit

$$\Gamma_K = \{\gamma \in \Gamma, [o, \gamma o] \cap \Gamma K \subset K \cup \gamma K\} \subset \Gamma,$$

sorte de **groupe fondamental en dehors de  $K$** .

L'**entropie à l'infini** est

$$\delta_\Gamma^\infty = \inf_{K \subset X} \delta_{\Gamma_K} \leq \delta_\Gamma.$$

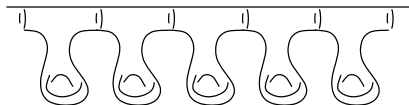
L'action de  $\Gamma$  sur  $X$  admet un **saut d'entropie à l'infini** quand

$$\delta_\Gamma^\infty < \delta_\Gamma.$$

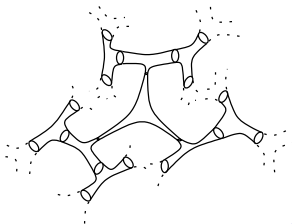
Nous appelons ces actions **fortement positivement récurrentes**.

# Variétés avec (sans) saut d'entropie à l'infini

Exemples typiques **sans** saut d'entropie : revêtements infinis



Exemples typiques **avec** saut d'entropie : variétés compactes/convexe-cocompactes, variétés localement symétriques géométriquement finies, produits Schottky, surfaces à la Ancona, ...



# Optimalité des hypothèses

Résultat **faux sans hyperbolicité** :

$\Gamma$  groupe moyennable à croissance exp,  $X = \text{Cay}(\Gamma)$ ,  $\Gamma' = \{1\}$ .  
Alors  $\delta_\Gamma > 0$  alors que  $\delta_{\Gamma'} = 0$ , et  $\Gamma/\Gamma' = \Gamma$  est moyennable.

Sur les **espaces symétriques de rang supérieur**, si  $\Gamma/\Gamma'$  est moyennable, alors  $\delta_\Gamma = \delta_{\Gamma'}$  (Glorieux-Tapie).

Résultat **faux sans saut d'entropie** :

Soit  $S = X/\Gamma$  une surface à courbure négative sans saut d'entropie.  
Par ex,  $S$  est le  $\mathbb{Z}$ -revêtement d'une surface hyperbolique compacte.  
On construit un  $\mathbb{F}_2$ -revêtement  $S' = X/\Gamma'$  de  $S$  en coupant  $S$  le long de deux courbes fermées disjointes non séparantes. Alors :

$$\delta_\Gamma \geq \delta_{\widehat{\Gamma}} \geq \delta_{\widehat{\Gamma}}^\infty = \delta_{\Gamma'}^\infty = \delta_\Gamma.$$

# La construction de Patterson-Sullivan

La **série de Poincaré**

$$P(s) = \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(o, \gamma o)}$$

a un **exposant critique**  $\delta_\Gamma$ . Pour  $s > \delta_\Gamma$ , on construit une mesure sur  $X \cup \partial X$

$$\nu^s = \frac{1}{P(s)} \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(o, \gamma o)} \mathcal{D}_{\gamma o}.$$

Quand  $s \rightarrow \delta_\Gamma$ , on définit  $\nu$  sur  $\partial X$  comme une valeur d'adhérence de  $\nu^s$ . La mesure  $\nu$  sur  $\partial X$  est quasi-invariante par  $\Gamma$ .

Le fibré unitaire tangent vérifie  $T^1X \simeq \partial X \times \partial X \setminus \text{Diag} \times \mathbb{R}$

On construit une mesure produit  $\Gamma$ -invariante équivalente à  $\nu \times \nu \times dt$

On obtient la *mesure de Bowen-Margulis*  $m_{BM}$  sur  $T^1X/\Gamma$  (ergodique, mélangeante...)

# Stratégie de la preuve

**Etape 1 :** Série de Poincaré twistée  $A(s) = \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(o, \gamma o)} \rho(\gamma)$ .

Son **exposant critique** vérifie  $\delta_\rho \in [\delta_{\Gamma'}, \delta_\Gamma]$  de sorte que pour  $s > \delta_\rho$ ,  $A(s) \in \mathcal{B}(\ell^2(\Gamma/\Gamma'))$ .

**Etape 2 :** Construction d'une **mesure de Patterson-Sullivan twistée**  $a^\rho$  sur  $\partial X$ , non nulle, à valeurs dans  $\mathcal{B}(\ell^2(\Gamma/\Gamma'))$ , comme limite faible de

$$\frac{1}{\|A(s)\|} \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(o, \gamma o)} \rho(\gamma) \mathcal{D}_{\gamma o}.$$

**Etape 3 :** Quand  $\delta_\rho = \delta_\Gamma$  et  $\delta_\Gamma^\infty < \delta_\Gamma$ ,  $a^\rho$  est **absolument continue** / la mesure de Patterson-Sullivan classique  $\nu$ .

**Etape 4 :** Par un **argument d'ergodicité**, on déduit que  $a^\rho = \Psi \cdot \nu$  où  $\Psi \in \mathcal{B}(\ell^2(\Gamma/\Gamma'))$  est une « constante multiplicative ».

**Etape 5 :** Par construction de  $a^\rho$  et  $\nu$ ,  $\Psi$  "est à valeurs" dans l'ensemble des vecteurs presque invariants.

# Etape 1 : La série de Poincaré twistée

Etudions  $A(s) = \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(o, \gamma o)} \rho(\gamma)$ .

L'espace de Hilbert  $\mathcal{H} = \ell^2(\Gamma/\Gamma', \mathbb{R})$  a un **ordre partiel** compatible avec la norme :  $\phi \geq 0$  si pour tout  $y \in \Gamma/\Gamma'$ ,  $\phi(y) \geq 0$ .

Definissons le **cône positif** associé  $\mathcal{H}_+$ . Un opérateur borné  $\mathcal{H}$  est **positif** s'il préserve  $\mathcal{H}_+$ . Tous les  $\rho(\gamma)$  sont positifs.

La série de Poincaré  $A(s)$  est **bornée** si  $\exists M > 0$ , t.q. pour tout ensemble fini  $S \subset \Gamma$ ,  $\|\sum_{\gamma \in S} e^{-sd(o, \gamma o)} \rho(\gamma)\| \leq M$ . L'**exposant critique**

$$\delta_\rho = \inf\{s \in \mathbb{R}, A(s) \text{ est borné}\}$$

est bien défini. Facile de vérifier que

$$\delta_{\Gamma'} \leq \delta_\rho \leq \delta_\Gamma.$$

L'**hypothèse**  $\delta_{\Gamma'} = \delta_\Gamma$  est utilisée seulement pour **garantir que**  
 $\delta_\rho = \delta_\Gamma$ .

## Etape 2 : La mesure de Patterson-Sullivan twistée

Soit  $\mathcal{H} = \ell^2(\Gamma/\Gamma')$ . On utilise un **ultrafiltre** nonprincipal  $\omega : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \{0, 1\}$ .

On construit un **Hilbert** plus grand  $\mathcal{H}_\omega = \lim_\omega \mathcal{H}$ , et on étend  $\rho$  en  $\rho_\omega : \Gamma \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}_\omega)$ . On a toujours un **ordre partiel** sur  $\mathcal{H}_\omega$ .

Une suite  $\Phi = (\phi_n)$  de **vecteurs presque invariants** dans  $\mathcal{H}^\mathbb{N}$  devient un **vecteur invariant**  $\Phi$  par  $\rho_\omega$  sur  $\mathcal{H}_\omega$ .

On choisit  $s_n \rightarrow \delta_\rho$ . Définie

$$a_n^\rho = \frac{1}{\|A(s_n)\|} \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-s_n d(o, \gamma o)} \rho(\gamma) \mathcal{D}_{\gamma o}.$$

Pour  $f \in C(X \cup \partial X)$ ,  $\int f da_n^\rho$  appartient à  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ , avec une norme uniformément bornée en  $n$ .

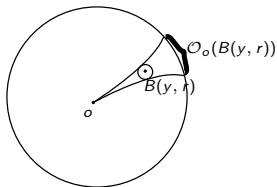
On définit  $a^\rho : C(X \cup \partial X) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_\omega)$  positive, linéaire, continue par

$$a^\rho(f) := \lim_\omega \int f da_n^\rho \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\omega).$$

**Mesure non nulle sur  $\partial X$  à valeurs dans  $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\omega)$**

## Etape 3 : Absolue continuité (I)

Une **ombre** est  $\mathcal{O}_o(B(y, r)) = \{\xi \in \partial X, (o\xi) \cap B(y, r) \neq \emptyset\}$ .



La **mesure de Patterson-Sullivan classique**  $\nu$  est une limite faible de  $\frac{1}{P(s)} \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(o, \gamma o)} \mathcal{D}_{\gamma o}$ .

Le **lemme de l'ombre de Sullivan** affirme que  $\nu(\mathcal{O}_o(B(\gamma o, r))) \asymp e^{-\delta_{\Gamma} d(o, \gamma o)}$ .

Un **demi-lemme de l'ombre** pour  $a^{\rho}$  :  $\|a^{\rho}(\mathcal{O}_o(B(\gamma o, r)))\| \leq e^{-\delta_{\Gamma} d(o, \gamma o)}$ .

## Etape 3 : Absolue continuité (II)

Absolute continuité sur les ombres

$$\|a^\rho(\mathcal{O}_o(B(\gamma o, r)))\| \leq \nu(\mathcal{O}_o(B(\gamma o, r))).$$

Le **saut d'entropie** permet de montrer que les points qui appartiennent à une infinité d'ombre sont de  $\nu$ -mesure et  $a^\rho$ -mesure pleines.

**Seul** endroit (clé) où nous utilisons le **saut d'entropie**.

Par un argument de type Vitali, nous déduisons que  $0 \neq a^\rho \ll \nu$ .

Pour tout  $\phi \in \mathcal{H}$ ,  $a^\rho.\phi \ll \nu$ .

Il existe une **dérivée de Radon-Nikodym**  $D(\phi) \in L^\infty(X \cup \partial X, \mathcal{H})$ , telle que

$$\int f \, d(a^\rho.\phi) = \int f \, D(\phi) \, d\nu.$$

## Etape 4 : Ergodicité

\* L'application  $\phi \in \mathcal{H} \rightarrow D(\phi) \in L^\infty((\partial X, \nu), \mathcal{H}_\omega)$  est linéaire et vérifie

$$\rho(\gamma) \circ D(\phi) \circ \gamma^{-1} = D(\phi).$$

\* L'application  $(\xi, \eta) \in (\partial X)^2 \rightarrow \langle D(\phi)(\xi), D(\phi)(\eta) \rangle_{\mathcal{H}_\omega} \in \mathbb{R}$  est une application  $\Gamma$ -invariante à valeurs réelles.

→ La mesure  $\nu \times \nu$  sur  $\partial X \times \partial X$  est ergodique pour l'action de  $\Gamma$

*Idée:*  $T^1X \simeq \partial X \times \partial X \times \mathbb{R}$ . La mesure de PS  $\nu$  sur  $\partial X$  permet de construire la mesure de Bowen-Margulis  $m_{BM} \sim \nu \times \nu \times dt$  sur  $T^1X/\Gamma$ . Par l'argument de Hopf, quand  $X$  est un espace  $CAT(-1)$ , c'est une mesure invariante ergodique pour le flot géodésique. Aussi **vrai pour  $X$  Gromov-hyperbolique** (stratégie à la Bader-Furman).

→ On déduit que  $D(\phi)$  est  $\nu \times \nu$ -p.s. constante.

## Etape 5 : Conclusion

On sait que (pour tout  $\phi \in \mathcal{H}_\omega$ , par ex avec  $\|\phi\| = 1$ )

$$\rho(\gamma) \circ D(\phi) \circ \gamma^{-1} = D(\phi).$$

De plus, cette application définie sur  $X \cup \partial X$  est ps constante.

On déduit pour tout  $\gamma \in \Gamma'$  égalité dans  $\mathcal{H}_\omega$

$$\rho(\gamma).D(\phi) = D(\phi)$$

Gagné!  $D(\phi)$  est notre vecteur  $\rho$ -invariant dans  $\mathcal{H}_\omega$ .

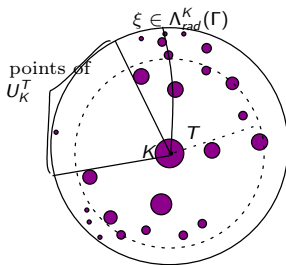
# Un peu plus sur le trou d'entropie

On veut montrer que  $\nu$  et  $a^p$  sont supportées dans  $\Lambda_{rad}(\Gamma)$  (même preuve).

$$\Lambda_{rad}(\Gamma) \supset \Lambda_{rad}^K(\Gamma) = \{\xi \in \Lambda(\Gamma), [o\xi) \text{ revient i.o dans } \Gamma.K\}$$

Define

$$U_K(T) = \{y \in X \cup \partial X, [oy) \text{ ne revient pas dans } K \text{ après le temps } T\}.$$



Le trou d'entropie  $\delta_\Gamma^\infty < \delta_\Gamma$  permet de montrer que

$$\nu(U_K^T) \leq e^{(\delta_{\Gamma_K} - \delta_\Gamma)T}$$

## Le sens « facile »

**Critère de Kesten** : toute marche aléatoire sur  $\Gamma/\Gamma'$  a un rayon spectral  $= 1$ .

On construit une suite de marches aléatoires associées aux mesures sphériques uniformes sur les sphères  $S(e, n)$ .

L'astuce dite de Barta : on peut estimer le rayon spectral sur les fonctions positives.

On majore uniformément en  $n$  les rayons spectraux par  $\exp(n(\delta_{\Gamma'} - \delta_{\Gamma}))$ .

Roblin avait besoin de  $\Gamma' \triangleleft \Gamma$ . Nous enlevons cette hypothèse mais utilisons  $\delta_{\Gamma'}^{\infty} < \delta_{\Gamma}$